

Silesian University in Opava  
Faculty of Philosophy and Science

---



**Abstract of Doctoral Thesis**

**Determination of Resonance  
Parameters  
from Experimental Data**

Branch: Theoretical Physics and Astrophysics

Supervisor: Prof. Ing. Peter Lichard, DrSc.

Martin Vojík

Opava 2010

---



Slezská Univerzita v Opavě

Filozoficko–přírodovědecká fakulta

---



**Autoreferát doktorské dizertační práce**

# **Určování parametrů rezonancí z experimentálních dat**

Obor: Teoretická fyzika a astrofyzika

Školitel: Prof. Ing. Peter Lichard, DrSc.

Martin Vojík

Opava 2010

---

*Školící pracoviště:* Ústav fyziky (Department of Physics)  
Filozoficko–přírodovědecká fakulta (Faculty of Philosophy and Science)  
Slezská univerzita v Opavě (Silesian University in Opava)  
Bezručovo nám. 13  
746 01 Opava  
Česká republika (Czech Republic)

*Doktorand:* Mgr. Martin Vojík  
Ústav fyziky FPF SU

*Školitel:* Prof. Ing. Peter Lichard, DrSc.  
Ústav fyziky FPF SU

*Oponenti:* RNDr. Stanislav Dubnička, DrSc.  
Fyzikálny ústav  
Slovenská akadémia vied  
Dúbravská cesta 9  
845 11 Bratislava  
Slovenská republika

Doc. RNDr. Rupert Leitner, DrSc.  
Ústav částicové a jaderné fyziky MFF UK  
Univerzita Karlova  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8  
Česká republika

*Předseda oborové rady:* Prof. RNDr. Zdeněk Stuchlík, CSc.  
Ústav fyziky FPF SU

Tato práce byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky smlouvami MSM6840770029, MSM4781305903 a LC07050.

Obhajoba se koná dne 19. srpna 2010 v seminární místnosti Ústavu fyziky (číslo dveří 316, 2. patro), budova FPF SU, Bezručovo nám. 13, Opava.

S dizertací je možné se seznámit na sekretariátu Ústavu fyziky (číslo dveří 320, 2. patro), budova FPF SU, Bezručovo nám. 13, Opava. Dizertaci a tento autoreferát lze získat v elektronické formě na <http://www.physics.cz>.

Autoreferát byl rozeslán dne .....

# Abstrakt

In order to reveal possible mass shifts of the vector mesons in a dense strongly interacting medium presumably created in high energy heavy ion collisions it is necessary to know their free masses reliably. The  $\rho(770)$  mass quoted in the last two editions of the Review of Particle Physics is significantly larger than the values quoted in previous editions. The new value is mostly influenced by the results of recent experiments CMD-2 and SND at the VEPP-2M  $e^+e^-$  collider at Novosibirsk. We show that the values of the mass and width of the  $\rho(770)$  meson measured in the  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  annihilation depend crucially on the parametrization used for the pion form factor. We propose a parametrization of the  $\rho(770)$  contribution to the pion form factor based on the running mass calculated from a single-subtracted dispersion relation and compare it with the parametrization based on the formula of Gounaris and Sakurai used recently by the CMD-2 collaboration. We show that our parametrization gives equally good or better fits when applied to the data of the CMD-2, SND, and KLOE collaborations, but yields much smaller values of the  $\rho(770)$  mass, consistent with the photoproduction and hadronic reactions results. Our fit to the KLOE data becomes exceptionally excellent (confidence level of 99.88%) if an energy shift of about 2 MeV in the  $\rho$ - $\omega$  region is allowed.

We show that the  $a_1\rho\pi$  Lagrangian is a decisive element for obtaining a good phenomenological description of the three-pion decays of the  $\tau$  lepton. We choose it in a two-component form with a flexible mixing parameter  $\sin\vartheta$ . In addition to the dominant  $a_1 \rightarrow \pi\rho$  intermediate states, the  $a_1 \rightarrow \pi\sigma$  ones are included. When fitting the three-pion mass spectra, three data sets are explored: (1) ALEPH 2005  $\pi^-\pi^+\pi^-$  data, (2) ALEPH 2005  $\pi^-\pi^0\pi^0$  data, and (3) previous two sets combined and supplemented with the ARGUS 1993, OPAL 1997, and CLEO 2000 data. The corresponding confidence levels are (1) 28.3%, (2) 100%, and (3) 7.7%. After the inclusion of the  $a_1(1640)$  resonance, the agreement of the model with data greatly improves and the confidence level reaches 100% for each of the three data sets. From the fit to all five experiments [data set (3)], the following parameters of the  $a_1(1260)$  are obtained:  $m_{a_1} = (1233 \pm 18)$  MeV,  $\Gamma_{a_1} = (431 \pm 20)$  MeV. The optimal value of the Lagrangian mixing parameter  $\sin\vartheta = 0.459 \pm 0.004$  agrees with the value obtained recently from the  $e^+e^-$  annihilation into four pions.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Parametrizace příspěvku <math>\rho(770)</math> k pionovému form-faktoru</b>	<b>10</b>
2.1	Gounaris-Sakurai parametrizace . . . . .	10
2.2	Running mass parametrizace . . . . .	11
2.3	Další příspěvky k pionovému form-faktoru . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Experimenty pro fitování pionového form-faktoru</b>	<b>13</b>
3.1	Experiment CMD-2 . . . . .	13
3.2	Experiment SND . . . . .	14
3.3	Experiment KLOE . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Model třípionového rozpadu <math>\tau^-</math> leptonu</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Interakční lagrangián <math>a_1\rho\pi</math></b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Experimenty pro fitování rozpadu <math>\tau \rightarrow 3\pi\nu_\tau</math></b>	<b>24</b>
6.1	Experiment ARGUS . . . . .	24
6.2	Experiment OPAL . . . . .	24
6.3	Experiment CLEO . . . . .	24
6.4	Experiment ALEPH . . . . .	25
6.5	Fitování experimentů ARGUS, OPAL, CLEO, ALEPH . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
	<b>Literatura</b>	<b>32</b>
<b>8</b>	<b>Publikace a prezentace na konferencích</b>	<b>35</b>
8.1	Publikace v recenzovaných časopisech . . . . .	35
8.2	Prezentace na konferencích . . . . .	35
8.3	Plakáty na konferencích . . . . .	35
<b>9</b>	<b>Prohlášení autora</b>	<b>36</b>

# Kapitola 1

## Úvod

V první části se budeme věnovat vektorovému mezonu  $\rho(770)$ , jenž hraje významnou úlohu v mnoha procesech jak v částicové, tak v jaderné fyzice. Možná modifikace jeho hmotnosti a šířky v silně interagujících systémech, vzniklých při srážkách těžkých iontů, je hojně diskutována v mnoha člancích [1–11]. Pro kvantitativní studium tohoto efektu, je zapotřebí mít v první řadě správnou informaci o „vakuových“ parametrech této rezonance.

Jak je z tabulky 1.1 patrné, zatímco hmotnost rezonance  $\rho(770)$  zůstává až do roku 2002 kompatibilní v mezích experimentálních chyb, v roce 2004 pozor-

PDG	$m_\rho$ (MeV)	$\Gamma_\rho$ (MeV)
1992 [12]	$768.1 \pm 0.5$	$151.5 \pm 1.2$
1994 [13]	$769.9 \pm 0.8$	$151.2 \pm 1.2$
1996 [14]	$768.5 \pm 0.6$	$150.7 \pm 1.2$
1998 [15]	$770.0 \pm 0.8$	$150.7 \pm 1.1$
2000 [16]	$769.3 \pm 0.8$	$150.2 \pm 0.8$
2002 [17]	$771.1 \pm 0.9$	$149.2 \pm 0.7$
2004 [18]	$775.8 \pm 0.5$	$150.3 \pm 1.6$
2006 [19]	$775.5 \pm 0.4$	$149.4 \pm 1.0$

Tabulka 1.1: Hmotnost a šířka  $\rho(770)$  podle PDG.

jeme velký nárůst. V tabulce 1.2 je naopak shrnuto, jaká je udávaná hmotnost  $\rho^0$  mezonu pocházející z různých procesů. Podle této tabulky je hmotnost  $\rho^0$  měřená v procesech anihilace  $e^+e^-$  signifikantně větší než hmotnost, jenž dostáváme z hadronových reakcí nebo fotoprodukce. Tyto diskrepance mezi výsledky měření

	$m_{\rho^0}$	$m_{\rho^\pm}$
	(MeV)	(MeV)
$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^+\pi^-\pi^0$	$775.5 \pm 0.4$	$775.4 \pm 0.4^a$
Fotoprodukce	$768.5 \pm 1.1$	/
Hadronové reakce	$769.0 \pm 0.9$	$766.5 \pm 1.1$

<sup>a</sup> Zahrnuje také rozpady  $\tau$  leptonu.

Tabulka 1.2: Hmotnost  $\rho(770)$  měřená v různých procesech (vybráno a průměrováno z PDG 2006 [19]).

$e^+e^-$  anihilace a hadronových reakcí či fotoprodukce, jsou velmi problematické a v tuto chvíli nemáme žádnou jednotnou teoretickou předpověď či objasnění tohoto fenoménu.

V odborné literatuře můžeme najít mnoho článků, které se zabývají určením parametrů rezonance  $\rho(770)$  z experimentálních dat pionového form-faktoru [20–30]. Jejich výsledky hmotnosti jsou nižší, v některých případech podstatně, než současné hodnoty hmotnosti  $\rho$  mezonu udávaných PDG (Particle Data Group).

Cílem této části práce je ukázat, že nejistota spojená s volbou parametrizace form-faktoru indukuje mnohem větší chyby v určení parametrů  $\rho$  mezonu, než statistické a systematické chyby dat, jež udávají jednotlivé experimentální skupiny.

Druhá část této práce se věnuje modelování rozpadu leptonu  $\tau^-$  na tři pi-ony a tauonové neutrino. Tato druhá část je úzce propojena s první částí práce přes použití running mass parametrizace v propagátorech  $\rho(770)$  mezonu, vystupujících v příslušných Feynmanových diagramech.

Axial-vektor isovektorová rezonance  $a_1(1260)$  byla studována v minulosti mnohými experimentálními a teoretickými skupinami, jež se systematicky zabývaly určením základních parametrů této rezonance. Mezi tyto základní parametry patří nominální hmotnost  $m_{a_1}$  a šířka  $\Gamma_{a_1}$ , které i přes veškeré úsilí nejsou dodnes spolehlivě určeny. Jak můžeme z tabulky 1.3 vyčíst, v průběhu let se udávaná hmotnost  $a_1$  mezonu příliš nemění, na rozdíl od šířky, která je stále uváděna ve velkém rozsahu.

Rezonance  $a_1(1260)$  hraje významnou úlohu v řadě procesů, a to jak v procesech vysokoenergetických, tak v nízkoenergetických. Parametry této rezonance byly vyšetřovány v různých procesech, avšak výsledky jsou často nekonzistentní.

Situace kolem těžších mezonů s kvantovými čísly  $J^{PC} = 1^{++}$  je rovněž nejasná. První náznaky rezonance s hmotností 1.65 GeV a šířkou 0.4 GeV se objevuje v literatuře [46] již roku 1978. Tato rezonance byla označena jako  $a'_1 \equiv a_1(1640)$  s nominální hmotností  $(1647 \pm 22)$  MeV a šířkou  $(254 \pm 27)$  MeV, nyní udávající

PDG	$m_{a_1}$ (MeV)	$\Gamma_{a_1}$ (MeV)	$a_1 \rightarrow \rho\pi$
1980 [34]	1100 – 1300	$\approx 300$	dominant
1982 [35]	$1275 \pm 30$	$315 \pm 45$	dominant
1986 [36]	$1275 \pm 28$	$316 \pm 45$	dominant
1988 [37]	$1260 \pm 30$	300 – 600	dominant
1990 [38]	$1260 \pm 30$	350 – 500	dominant
1992 [12]	$1260 \pm 30$	$\approx 400$	dominant
1994 [13]	$1230 \pm 40$	$\approx 400$	dominant
1998 [15]	$1230 \pm 40$	250 – 600	dominant
2000 [16]	$1230 \pm 40$	250 – 600	seen
2008 [39]	$1230 \pm 40$	250 – 600	seen

Tabulka 1.3: Přehled hmotností a šířek rezonance  $a_1(1260)$  v průběhu let 1980-2008 podle Particle Data Group.

PDG 2008 [39].

Nejdůležitějším článkem, kromě vlastního propagátoru  $a_1$  mezonu, v rozpadu  $\tau$  leptonu na tři piony a neutrino, je bezpochyby interakční vrchol  $a_1\rho\pi$ . Nalezení korektního  $a_1\rho\pi$  lagrangiánu, který bude uspokojivě popisovat třípionovou produkci v rozpadu  $\tau$  leptonu, má přímý vliv i na jiné části subnukleární či jaderné fyziky. Například, rezonance  $a_1$  a její silná vazba na  $\rho\pi$  systém hraje důležitou úlohu při výpočtech výtěžků dileptonů a fotonů z hadronového „fireballu”, převážně vznikajícího v relativistických srážkách těžkých iontů.

Hlavním cílem této části práce je fenomenologicky popsat interakci  $a_1\rho\pi$  a tento popis aplikovat na rozpady tau leptonů. Námi vytvořený model použijeme na fitování několika experimentů různých experimentálních skupin zabývajících se rozpadem  $\tau$  leptonu.

Námi uvažované experimenty pro fitování budou dvojího druhu. Jednak to budou data rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$  a jednak data rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \pi^0 \nu_\tau$ . Fitováním dat experimentů několika různých experimentálních skupin (popřípadě fitem několika experimentů simultánně) a dvou nestejných reakcí bychom měli docílit vyšší spolehlivosti výběru správného lagrangiánu interakce  $a_1\rho\pi$  a parametrů v něm vystupujících.

# Kapitola 2

## Parametrizace příspěvku $\rho(770)$ k pionovému form-faktoru

Příspěvek rezonance  $\rho^0$  k elektromagnetickému pionovému form-faktoru  $F_\pi(s)$  budeme psát v následující formě

$$F_\rho(s) = \frac{M_\rho^2(0)}{M_\rho^2(s) - s - im_\rho\Gamma_\rho(s)}, \quad (2.0.1)$$

kde  $M_\rho^2(s)$  označujeme reálnou funkcí, která splňuje obecné požadavky

$$M_\rho^2(m_\rho^2) = m_\rho^2 \quad (2.0.2)$$

a

$$\left. \frac{dM_\rho^2(s)}{ds} \right|_{s=m_\rho^2} = 0, \quad (2.0.3)$$

kde  $m_\rho$  je nominální hmotnost  $\rho^0$  mezonu a reálná funkce  $\Gamma_\rho(s)$  označuje energeticky závislou celkovou šířku  $\rho^0$  mezonu s hmotností  $\sqrt{s}$ .

### 2.1 Gounaris-Sakurai parametrizace

Model Gounaris a Sakurai [51] uvažuje nízkoenergetickou parametrizaci fázového posunu v  $P_{11}$  vlně  $\pi\pi$  elastického rozptylu. Jejich parametrizace form-faktoru vzhledem k rovnici (2.0.1) vypadá následovně. Energeticky závislá šířka, použitá v GS parametrizaci nabývá tvaru

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_\rho \frac{m_\rho}{\sqrt{s}} \left( \frac{s - 4m_\pi^2}{m_\rho^2 - 4m_\pi^2} \right)^{3/2}, \quad (2.1.4)$$

kde  $\Gamma_\rho = \Gamma_\rho(m_\rho^2)$  je nominální šířka mezonu  $\rho(770)$ . Funkce  $M_\rho^2(s)$  je potom definovaná následovně

$$M_\rho^2(s) = m_\rho^2 + f(s), \quad (2.1.5)$$

kde funkce  $f(s)$  je ve tvaru

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{2\Gamma_\rho m_\rho^2}{(m_\rho^2 - 4m_\pi^2)^{3/2}} \left\{ (s - 4m_\pi^2) [h(s) - h(m_\rho^2)] \right. \\ &\quad \left. + (m_\rho^2 - 4m_\pi^2) h'(m_\rho^2) (m_\rho^2 - s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Running mass parametrizace

Naše alternativní parametrizace  $F_\rho(s)$  je vystavěna na tzv. running mass modelu [33]. Náš model se liší od GS parametrizace příspěvkem form-faktoru mezonu  $\rho(770)$  celkem ve čtyřech bodech: (i) Pro výpočet celkové šířky  $\Gamma_\rho(s)$  uvažujeme několik možných rozpadových kanálů  $\rho$  mezonu. Jednotlivé kanály se postupně otevírají se zvyšující se dostupnou hmotností  $\sqrt{s}$   $\rho$  mezonu. (ii) Parciální rozpadová šířka dvoupionového rozpadu, která tvoří základní příspěvek k celkové šířce je spočítána ze standardního lagrangiánu obsahujícího první derivace pionových polí (vztah (2.2.9)). (iii) Do všech hadronových vrcholů jsme zahrnuli silné form-faktory. (iv) Jelikož celková energetická šířka  $\Gamma_\rho(s)$  neroste příliš rychle, jako v případě GS parametrizace, můžeme použít disperzní relaci s jedním subtrakčním bodem

$$M_\rho^2(s) = B_0 - \frac{s}{\pi} \mathcal{P} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{m_\rho \Gamma_\rho(s')}{s'(s' - s)} ds'. \quad (2.2.7)$$

Subtrakční konstanta  $B_0$  je potom zvolena tak, aby byla splněna podmínka (2.0.2). Celková šířka rezonance  $\rho(770)$  je potom složena z parciálních šířek

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}(s) + \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi\eta}(s) + \Gamma_{\rho \rightarrow \omega\pi}(s) + \Gamma_{\rho \rightarrow (KK+K\bar{K})}(s), \quad (2.2.8)$$

kde dominantní příspěvek  $\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}(s)$  k celkové šířce je dán vztahem

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}(s) = \Gamma_\rho \frac{m_\rho^2}{s} \left( \frac{s - 4m_\pi^2}{m_\rho^2 - 4m_\pi^2} \right)^{3/2}. \quad (2.2.9)$$

## 2.3 Další příspěvky k pionovému form-faktoru

Pionový elektromagnetický form-faktor by měl obsahovat, mimo dominantního příspěvku od mezonu  $\rho(770)$ , také příspěvky od dalších rezonancí. V energetickém rozsahu, v němž se námi uvažované experimenty  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  pohybují,

budeme uvažovat tyto příspěvky mezonových rezonancí  $\rho' \equiv \rho(1450)$ ,  $\omega(782)$  a také  $\phi(1020)$ . Pionový elektromagnetický form-faktor potom píšeme ve tvaru

$$F_\pi(s) = \left\{ F_\rho(s) \left[ 1 + \delta \frac{s}{m_\omega^2} F_\omega(s) \right] + \beta F_{\rho'}(s) + \gamma F_\phi(s) \right\} \times (1 + \beta + \gamma)^{-1}, \quad (2.3.10)$$

kde nejen samotné  $F_\pi(s)$ , ale i ostatní individuální příspěvky k form-faktoru jsou normalizovány k jedničce v  $s = 0$ . Parametry  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\delta$  představují obecně komplexní čísla, která by měla být určena spolu s parametry  $m_\rho$  a  $\Gamma_\rho$  minimalizací funkce  $\chi^2$  sestavené standardním způsobem z modelu a experimentálních dat. V naší parametrizaci budeme používat form-faktor  $\rho'$  s konstantní hmotností

$$F_{\rho'}(s) = \frac{m_{\rho'}^2}{m_{\rho'}^2 - s - im_{\rho'}\Gamma_{\rho'}(s)} \quad (2.3.11)$$

s několika možnostmi modelování celkové šířky  $\rho'$ : (1)  $\Gamma_{\rho'}(s) \equiv \Gamma_{\rho(1450)}$ ; (2) Rovnice (2.1.4) přizpůsobena pro  $\rho(1450)$ ; (3)  $\Gamma_{\rho'}(s) \equiv 0$ ; (4)  $\Gamma_{\rho'}(s)$ : stejná formule jako (2.2.9) přizpůsobená pro  $\rho(1450)$ .

Jako další máme příspěvek rezonance  $\omega(782)$  k elektromagnetickému form-faktoru. Ten budeme opět psát ve tvaru s konstantní hmotností  $m_\omega$

$$F_\omega(s) = \frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - s - im_\omega\Gamma_\omega(s)}. \quad (2.3.12)$$

Pro šířku  $\Gamma_\omega(s)$  budeme uvažovat následující možnosti: (1)  $\Gamma_\omega(s) \equiv \Gamma_{\omega(782)}$  nad prahem  $s = 9m_\pi^2$ ; (2)  $\Gamma_\omega(s) = \Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}(s)$ ; (3) Stejně jako v případě 2, ale se zahrnutím silného form-faktoru; (4)  $\Gamma_\omega(s) = \Gamma_{\omega \rightarrow 3\pi}(s) + \Gamma_{\omega \rightarrow \pi\gamma}(s) + \Gamma_{\omega \rightarrow \pi^+\pi^-}(s)$ ; (5) Stejně jako v případě 4, ale se zahrnutím silného form-faktoru.

V případě experimentu SND se ukázal příspěvek interference  $\rho - \phi$  statisticky významný, soudě podle poklesu  $\chi^2$  pro GS i naší parametrizaci. Naše parametrizace příspěvku  $\phi(1020)$  k pionovému form-faktoru bereme v následujícím tvaru

$$F_\phi(s) = \frac{m_\phi^2}{m_\phi^2 - s - im_\phi\Gamma_\phi(s)}. \quad (2.3.13)$$

Nyní uvažujme tyto možnosti výběru šířky  $\Gamma_\phi(s)$ : (1)  $\Gamma_\phi(s) \equiv \Gamma_{\phi(1020)}$  nad prahem  $s = 4m_K^2$ ; (2)  $\Gamma_\phi(s) = \Gamma_{\phi \rightarrow K\bar{K}}(s)$ ; (3) Stejně jako v případě 2, ale se zahrnutím silného form-faktoru; (4)  $\Gamma_\phi(s) = \Gamma_{\phi \rightarrow K\bar{K}}(s) + \Gamma_{\phi \rightarrow 3\pi}(s) + \Gamma_{\phi \rightarrow \eta\gamma}(s)$ ; (5) Stejně jako v případě 4, ale se zahrnutím silného form-faktoru.

# Kapitola 3

## Experimenty pro fitování pionového form-faktoru

### 3.1 Experiment CMD–2

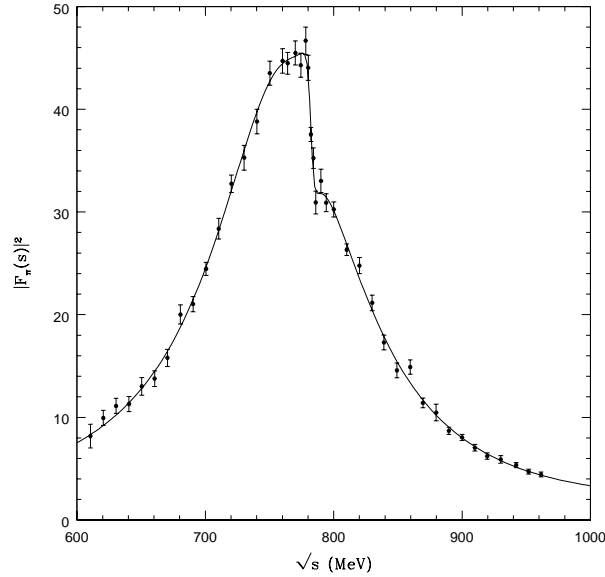
V roce 2002 experimentální skupina CMD–2 [31] publikovala výsledky svých měření účinných průřezů reakce  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  pro 43 energií v rozsahu od 610.50 do 961.52 MeV a současně publikovala extrahované hodnoty pionového elektromagnetického form-faktoru. Po nalezení chyby v programu, publikovala skupina CMD–2 [32] opravené hodnoty pionového form-faktoru, kterými se zde budeme zabývat. Nejprve jsme otestovali správnost počítačového programu na nekorigo-

	GS	náš model
$\chi^2/NDF$	35.16/37	32.18/37
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ )	$775.3 \pm 1.1$	$767.08 \pm 0.83$
$\Gamma_\rho$ (MeV)	$143.2 \pm 2.5$	$136.1 \pm 2.2$
$\langle r_\pi^2 \rangle$ (fm $^2$ )	$0.416 \pm 0.013$	$0.434 \pm 0.012$

Tabulka 3.1: Hmotnost, šířka  $\rho(770)$  a střední poloměr pionu z procesu fitování CMD–2 dat. Udávaná experimentální hodnota středního kvadrátu poloměru pionu je  $(0.439 \pm 0.008) \text{ fm}^2$  [53].

vaných datech CMD–2 [31], protože ty obsahují více informací o GS parametrizaci, než článek [32] s daty korigovanými. Následně jsme použili korigovaná data pionového form-faktoru [32] a dostali jsme hodnoty parametrů uvedené v druhém sloupci tabulky 3.1. Jak je z tabulky 3.1 vidět, naše running mass parametrizace dává poněkud lepší fit CMD–2 dat, než je tomu v případě GS modelu. Přesto, že  $\chi^2$  je v obou případech podobné, hodnoty hmotností a šířky  $\rho(770)$  se pod-

statně liší. Z tabulky je zřejmé, že při použití GS a RM parametrizace dostáváme vzájemně nekompatibilní výsledky.

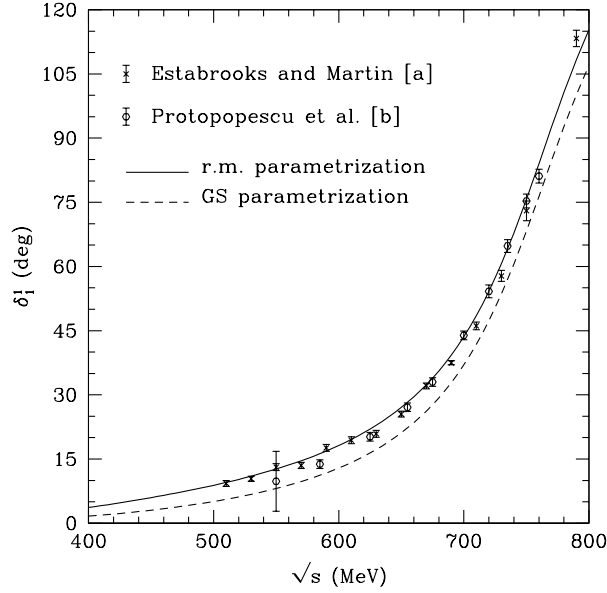


Obrázek 3.1: Porovnání naší parametrizace pionového form-faktoru s CMD–2 daty.

Grafické porovnání naší RM parametrizace s CMD–2 daty je zobrazeno na obrázku 3.1. Porovnávali jsme taktéž komplexní fázi  $\delta_1^1$  danou GS a running mass parametrizací příspěvků  $\rho$  mezonu k pionovému form-faktoru s fázovým posunem parciální vlny  $L = 1, I = 1$  v  $\pi\pi$  rozptylu. Tato závislost je zobrazena na obrázku 3.2. Jak je z tohoto obrázku vidět, křivka odpovídající GS parametrizaci leží systematicky níže, než příslušná naměřená data, navíc mimo oblast chyb udávaných experimentátory. Naproti tomu RM parametrizace dává poměrně dobrou shodu námi vypočteného fázového posunu s experimentálními daty i přesto, že udávaná chyba dat je velmi malá.

## 3.2 Experiment SND

V roce 2005 byly publikovány výsledky účinných průřezů  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  získaných na detektoru SND (sférický neutrální detektor) na urychlovači VEPP–2M v Novosibirsku [54]. Jejich naměřené pionové form-faktory se sestávají z 45 experimentálních bodů v energetickém rozsahu od 0.39 do 0.97 GeV. Později tatáž experimentální skupina vydala opravenou verzi naměřených dat [48]. Porovnání GS a naší parametrizace (obě zahrnující příspěvek  $\phi(1020)$  rezonance) je v tabulce 3.2.



Obrázek 3.2: Porovnání komplexní fáze running mass a Gounaris-Sakurai parametrizace s daty fázového posunu v P vlně v  $\pi\pi$  rozptylu. [a] P. Estabrooks, A. D. Martin, *Nucl. Phys. B* **79**, 301 (1974); [b] S. D. Protopopescu et al., *Phys. Rev. D* **7**, 1279 (1973).

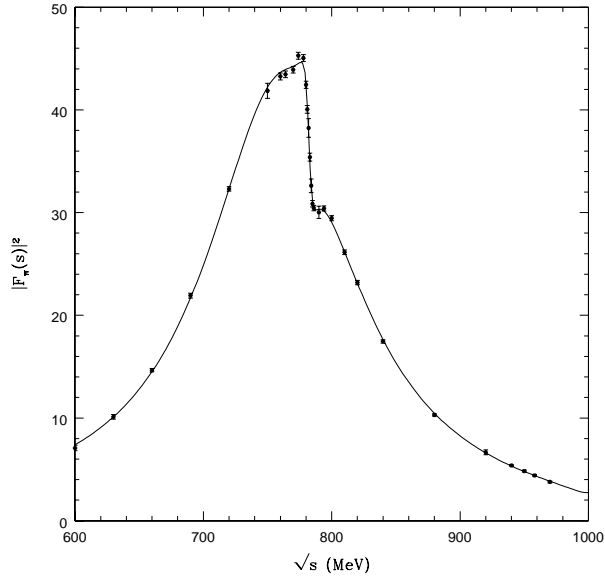
V posledním sloupci tabulky 3.2 jsou výsledky fitování experimentální skupiny SND. Formule pro fitování dat skupiny SND jsou popsány v článku [54]. Bohužel tento článek s opravenými daty není příliš konkrétní, co se týče použité parametrizace pro fitování, ani neposkytuje informace o veličině  $\chi^2$  jejich fitu.

	GS	náš model	SND fit
$\chi^2/NDF$	39.94/38	39.80/38	nepublikováno
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ )	$774.60 \pm 0.52$	$764.23 \pm 0.43$	$774.6 \pm 0.4 \pm 0.5$
$\Gamma_\rho$ (MeV)	$147.3 \pm 1.0$	$140.29 \pm 0.85$	$146.1 \pm 0.8 \pm 1.5$

Tabulka 3.2: Hmotnost a šířka  $\rho(770)$  získaná fitováním dat SND.

Nicméně z tabulky 3.2 je vidět kompatibilita obou parametrů  $m_\rho$  a  $\Gamma_\rho$  mezi GS parametrizací a modelem použitým skupinou SND.

V tomto případě GS i naše parametrizace poskytuje stejně dobrý fit na základě blízké podobnosti  $\chi^2$  obou modelů, ale hodnoty hmotnosti a šířky jsou opět systematicky nižší a tedy nekompatibilní, stejně jako tomu bylo v případě fitování CMD-2 dat.



Obrázek 3.3: Porovnání naší parametrizace pionového form-faktoru s SND daty.

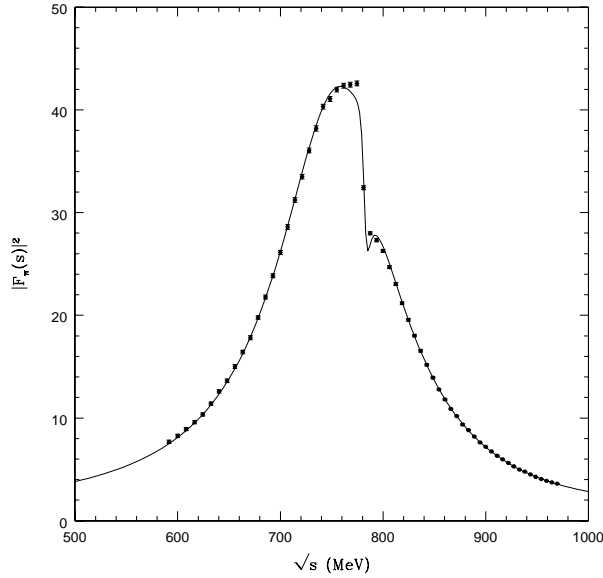
### 3.3 Experiment KLOE

Data účinných průřezů  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$  při kolizní energii  $W = 1.02$  GeV byly měřeny detektorem KLOE na urychlovači DAΦNE ve Frascati [49]. Pro extrakci kvadrátu pionového form-faktoru  $|F_\pi(s)|^2$  bylo využito tzv. „radiative return” metody [55]. Parametr  $s < W^2$  nyní označuje kvadrát invariantní hmotnosti  $\pi^+\pi^-$  systému. Výsledky těchto fitů se nacházejí v tabulce 3.3. Jak vidno, oba

	GS	náš model
$\chi^2/NDF$	367.8/54	192.6/54
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ )	$769.22 \pm 0.32$	$761.39 \pm 0.25$
$\Gamma_\rho$ (MeV)	$144.71 \pm 0.56$	$140.07 \pm 0.66$

Tabulka 3.3: Hmotnost a šířka  $\rho(770)$  mezonu získána fitováním dat KLOE.

fity vykazují vysoké  $\chi^2$ . Zajímavý je fakt, že nejen náš model, ale i GS model dává hmotnost  $\rho(770)$  mezonu podstatně nižší než oba Novosibirské experimenty CMD-2 a SND. Ve snaze vylepšit tuto tristní situaci jsme se pokusili zahrnout interferenci mezi  $\rho$  a  $\phi$  do pionového form-faktoru, avšak kvalitu fitu to významně neovlivnilo. Při pohledu na obrázek 3.4 vidíme, že nejhorší diskrepance naší parametrizace s daty se objevuje v  $\rho$ - $\omega$  regionu, jinými slovy v intervalu mezi



Obrázek 3.4: Porovnání naší parametrizace pionového form-faktoru s KLOE experimentem.

polohou rezonančních píků  $\rho$  a  $\omega$  mezonů. Rovněž je na první pohled patrné, že chybí náhlý pokles na vrcholu křivky, jak je tomu na obrázcích 3.1 a 3.3. Detailní analýza tohoto problému ukázala, že náhlý pokles na vrcholu křivky je zapříčiněn  $\rho$ - $\omega$  interferenčním členem, který je velmi citlivý na přesnou polohu velmi úzké rezonance  $\omega$ . Absence interferenčního členu v obrázku 3.4 naznačuje, že pozice  $\omega$  rezonance je odlišná od pozice, jenž jsme uvažovali my při fitování těchto dat GS a RM parametrizací. To by mohlo znamenat, že v datech KLOE existuje systematický posun v měření energie alespoň v  $\rho$ - $\omega$  oblasti.

Pro bližší prozkoumání možnosti, že v datech KLOE je skutečně přítomen nějaký posun, jsme zahrnuli hmotnost  $\omega$  mezonu mezi volné parametry GS i našeho modelu a znovu jsme fitovali data skupiny KLOE. Obě parametrizace ukazují, že nejlepší fit je možno získat, když nominální hmotnost  $\omega$  mezonu snížíme zhruba o 2 MeV. Výsledky fitování jsou obsaženy v tabulce 3.4. Zatímco hodnota  $\chi^2 = 202.6$  pro GS parametrizaci je stále vysoká (skoro čtyřikrát vyšší než počet stupňů volnosti), naše parametrizace dává  $\chi^2 = 29.6$ , což při počtu stupňů volnosti  $NDF = 53$  znamená, že úroveň spolehlivosti teorie (confidence level) je  $CL = 0.9962$ . Zlepšení fitu je vidět na první pohled při porovnávání průběhů na obrázcích 3.4 a 3.5.

Na obrázku 3.5 opět vidíme „obnovení“ interference mezi  $\rho$  a  $\omega$  rezonancemi a stejně jako u předchozích fitovaných experimentů je přítomen náhlý pokles kvadrátu absolutní hodnoty pionového form-faktoru v  $\rho$ - $\omega$  oblasti.

	GS	náš model
$\chi^2/NDF$	202.6/53	29.58/53
$m_\omega$ (MeV/ $c^2$ )	$780.52 \pm 0.33$	$780.72 \pm 0.15$
$\Delta m_\omega$ (MeV/ $c^2$ ) <sup>a</sup>	$2.13 \pm 0.35$	$1.93 \pm 0.19$
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ )	$769.45 \pm 0.25$	$761.51 \pm 0.14$
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ ) <sup>b</sup>	$771.58 \pm 0.60$	$763.44 \pm 0.33$
$\Gamma_\rho$ (MeV)	$146.39 \pm 0.51$	$142.56 \pm 0.41$

<sup>a</sup> Rozdíl oproti  $m_\omega = (782.65 \pm 0.12)$  MeV [19].

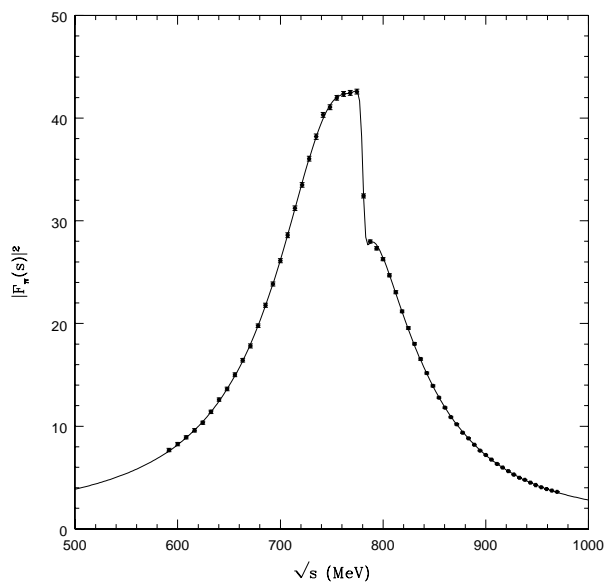
<sup>b</sup> Hodnota získaná z fitu po zvýšení nominální hmotnosti  $m_\omega$  o  $\Delta m_\omega$ .

Tabulka 3.4: Fitování dat KLOE, kde hmotnost  $\omega(782)$  mezonu je mezi volnými parametry.

Za předpokladu, že v KLOE datech je přítomen systematický posun, jsme provedli fit dat s posunem  $\Delta m_\omega$  vzhledem k nominální hmotnosti  $\omega(782)$  a dostali jsme „opravenou“ hmotnost  $\rho$  mezonu (tabulka 3.4). Bohužel naše interpretace posunu energií v oblasti  $\rho$ – $\omega$ , jako experimentální efekt chybné kalibrace detektoru KLOE, se jeví jako problematická a účastníci projektu tuto eventualitu v emailové korespondenci vyloučili.

Ve snaze odhalit původ tohoto záhadného posunu energie v regionu  $\rho$ – $\omega$ , jsme uvažovali možnost, že tento efekt je pouze artefakt špatné parametrizace. Vzali jsme tedy naši parametrizaci  $\rho^0$  mezonu (2.0.1) spolu s formulí (2.2.7) a zkoušeli jsme různé parametrizace ostatních příspěvků form-faktoru (2.3.10), jak je popsáno v kapitole 2.3. Efekt posunu hmotnosti  $\omega$  mezonu při žádné z parametrizací nevymizel a choval se velmi stabilně, nezávisle na konkrétní použité parametrizaci.

Další vylepšení obou fitů nastává při zahrnutí příspěvku mezonu  $\phi(1020)$ . Kvalita fitu se nezvýšila pouze u našeho modelu, ale především u GS parametrizace. Výsledky těchto fitování jsou uvedeny v tabulce 3.5. I po tomto vylepšení je námi dosažená hodnota  $m_\rho$  a  $\Gamma_\rho$  stále menší, než v případě GS modelu.



Obrázek 3.5: Porovnání naší parametrizace pionového form-faktoru s KLOE daty po snížení rezonanční hmotnosti  $\omega(782)$  o 1.93MeV.

	GS	náš model
$\chi^2/NDF$	58.35/51	25.67/51
$m_\omega$ (MeV/ $c^2$ )	$780.15 \pm 0.17$	$780.71 \pm 0.15$
$\Delta m_\omega$ (MeV/ $c^2$ ) <sup>a</sup>	$2.50 \pm 0.21$	$1.94 \pm 0.19$
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ )	$770.29 \pm 0.16$	$761.54 \pm 0.16$
$m_\rho$ (MeV/ $c^2$ ) <sup>b</sup>	$772.79 \pm 0.35$	$763.48 \pm 0.33$
$\Gamma_\rho$ (MeV)	$151.53 \pm 0.55$	$142.78 \pm 0.46$

<sup>a</sup> Rozdíl oproti  $m_\omega = (782.65 \pm 0.12)$  MeV [19].

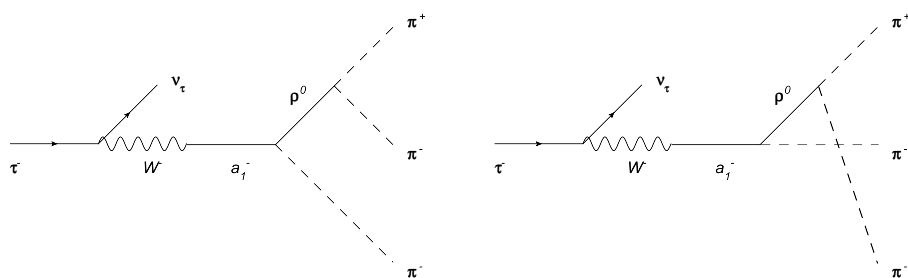
<sup>b</sup> Hodnota získaná z fitu po zvýšení nominální hmotnosti  $m_\omega$  o  $\Delta m_\omega$ .

Tabulka 3.5: Fitování dat KLOE, kde hmotnost  $\omega(782)$  mezonu je mezi volnými parametry, kde uvažujeme  $\rho$ - $\phi$  interferenci.

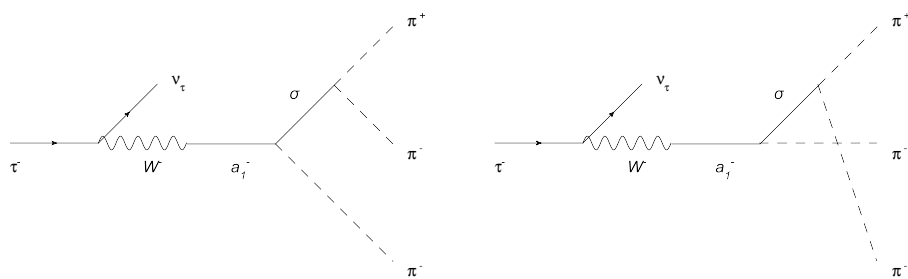
# Kapitola 4

## Model třípionového rozpadu $\tau^-$ leptonu

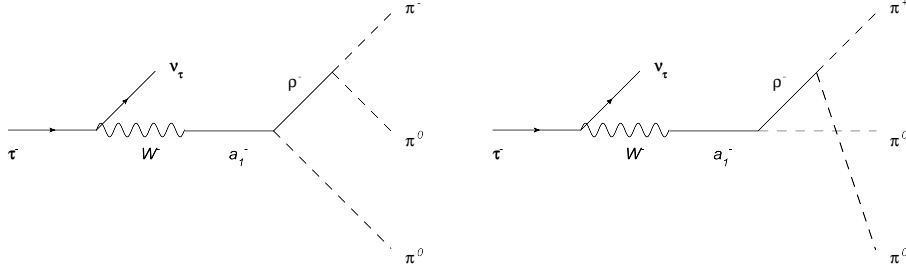
V našem modelu nepočítáme standardně jen s dominantním rozpadem rezonance  $a_1(1260)$  v intermediálním stavu na systém  $\rho\pi$ , ale zahrnujeme také možný rozpad této rezonance na systém  $\sigma\pi$ , jak je vidět z obrázků 4.2 a 4.4.



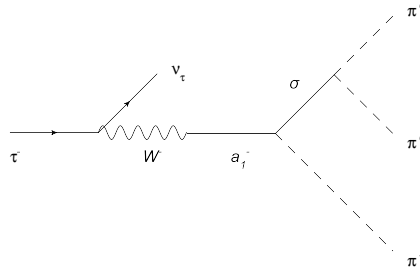
Obrázek 4.1: Feynmanovy diagramy rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$  probíhající přes rezonance  $a_1^-(1260)$  a  $\rho^0(770)$ .



Obrázek 4.2: Feynmanovy diagramy rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$  probíhající přes rezonance  $a_1^-(1260)$  a  $\sigma$ .



Obrázek 4.3: Feynmanovy diagramy rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^-\nu_\tau$  probíhající přes rezonance  $a_1^-(1260)$  a  $\rho^-(770)$ .



Obrázek 4.4: Feynmanův diagram rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^-\nu_\tau$  probíhající přes rezonance  $a_1^-(1260)$  a  $\sigma$ .

Náš model se liší od ostatních modelů především v použitých interakčních lagrangiánech a v použití running mass propagátorů pro rezonance  $a_1(1260)$  a  $\rho(770)$ . Propagátor rezonance  $a_1$  ve všech uvažovaných diagramech rozpadu  $\tau^-$  leptonu vyjádříme ve tvaru

$$-iG_{a_1}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / m_{a_1}^2}{t - M_{a_1}^2(t) + im_{a_1}\Gamma_{a_1}(t)}, \quad (4.0.1)$$

kde invariant  $t$  je definován  $t = q^2 = (p_\tau - p_{\nu_\tau})^2$ . V propagátoru rezonance  $a_1$  budeme uvažovat použití running mass disperzní formule pro funkci  $M_{a_1}(t)$ .

Interakci  $a_1\sigma\pi$  popisujeme interakčním lagrangiánem ve tvaru

$$\mathcal{L}_{a_1\sigma\pi} = a_1^{-\mu}(g_a \sigma \partial_\mu \pi^- + g_b \pi^- \partial_\mu \sigma) + H.c., \quad (4.0.2)$$

přičemž  $g_a$  a  $g_b$  představují vazbové konstanty.

Propagátor rezonance  $\rho$  bereme v tomto tvaru (running mass)

$$-iG_\rho^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu / m_\rho^2}{s - M_\rho^2(s) + im_\rho\Gamma_\rho(s)}, \quad (4.0.3)$$

kde invariant  $s = k^2$ . Jedná se o shodný výpočet running mass, jenž byl použit v práci [33].

Propagátor skalární rezonance  $\sigma$  bereme ve standardním tvaru

$$-iG_\sigma(k) = \frac{1}{s - m_\sigma^2 + im_\sigma\Gamma_\sigma(s)}, \quad (4.0.4)$$

kde  $m_\sigma$  je nominální hmotnost rezonance  $\sigma$  a  $\Gamma_\sigma(s)$  je její příslušná energeticky závislá šířka.

Dalšími částmi našeho modelu jsou vrcholy popisující  $\rho\pi\pi$  a  $\sigma\pi\pi$  interakci. Pro interakční vrchol  $\rho\pi\pi$  píšeme

$$\mathcal{L}_{\rho\pi\pi} = g_{\rho\pi\pi}\rho^\mu \cdot (\phi \times \partial_\mu\phi), \quad (4.0.5)$$

kde  $\phi$  je polním operátorem pionu a  $\rho$  polním operátorem  $\rho$  mezonu.

Interakci mezi skalárním polem  $\sigma$  a pseudoskalárními poli  $\pi$  budeme popisovat interakčním lagrangiánem ve tvaru

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi\pi} = g_{\sigma\pi\pi}\sigma\phi^\dagger\phi, \quad (4.0.6)$$

kde vektor  $\phi$  je definován stejně jako v rovnici (4.0.5) a  $\sigma$  představuje operátor pole skalární rezonance  $f_0(600)$ .

V představených efektivních lagrangiánech popisujících interakci hadronů, vystupují hadrony jako elementární kvanta korespondujících polí. Pro realističtější popis interakce hadronů byly zavedeny *tzv. silné form-faktory*, které modifikují příslušné vazbové konstanty faktorem

$$\exp\left\{-\frac{p^{*2}}{12\beta^2}\right\}, \quad (4.0.7)$$

kde  $p^*$  je hybnost produktu rozpadu v klidové soustavě rozpadající se částice. Parametr  $\beta$  vystupující v (4.0.7) byl stanoven v práci [47] na  $\beta = 0.4$  GeV.

Při vyšetřování možné přítomnosti radiální rekurence rezonance  $a_1(1260)$ , označované jako  $a'_1$ , jsme do propagátoru  $a_1(1260)$  mezonu zahrnuli propagátor  $a'_1$  ve tvaru

$$-iG_{a'_1}^{\mu\nu}(q) = \alpha \frac{-g^{\mu\nu} + m_{a'_1}^{-2}q^\mu q^\nu}{t - m_{a'_1}^2 + im_{a'_1}\Gamma_{a'_1}(t)}, \quad (4.0.8)$$

kde  $\alpha$  je komplexní parametr. Komplexní parametr vystupuje v našem modelu jako další z volných parametrů a jeho určení vyplyne při vlastním fitování experimentálních dat. Pro energeticky závislou šířku  $\Gamma_{a'_1}(t)$  budeme předpokládat stejné chování jako v případě rezonance  $a_1(1260)$ .

# Kapitola 5

## Interakční lagrangián $a_1\rho\pi$

Interakční lagrangián jsme zvolili ve tvaru lineární kombinace dvou lagrangiánů  $\mathcal{L}_1$  a  $\mathcal{L}_2$  s mixovacím parametrem  $\vartheta$

$$\mathcal{L}_{a_1\rho\pi} = \frac{g_{a_1\rho\pi}}{\sqrt{2}} (\cos \vartheta \mathcal{L}_1 + \sin \vartheta \mathcal{L}_2). \quad (5.0.1)$$

Konstanta  $g_{a_1\rho\pi}$  je potom společná pro oba dva lagrangiány.  $\mathcal{L}_1$  a  $\mathcal{L}_2$  jsou potom dány vztahy

$$\mathcal{L}_1 = \mathbf{A}^\mu \cdot (\mathbf{V}_{\mu\nu} \times \partial^\nu \phi), \quad \mathcal{L}_2 = \mathbf{V}_{\mu\nu} \cdot (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu \times \phi), \quad (5.0.2)$$

kde jsme zavedli označení

$$\mathbf{V}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathbf{V}_\nu - \partial_\nu \mathbf{V}_\mu. \quad (5.0.3)$$

Výrazy  $\mathbf{A}^\mu$ ,  $\mathbf{V}^\mu$  a  $\phi$  představují vektory v izospinovém prostoru a jsou v našem případě definovány jako

$$\mathbf{A}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{+\mu} + a_1^{-\mu}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(a_1^{+\mu} - a_1^{-\mu}) \\ a_1^{0\mu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{+\mu} + \rho^{-\mu}) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\rho^{+\mu} - \rho^{-\mu}) \\ \rho^{0\mu} \end{pmatrix},$$
$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^+ + \pi^-) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\pi^+ - \pi^-) \\ \pi^0 \end{pmatrix}. \quad (5.0.4)$$

Námi použitý lagrangián (5.0.4) je v podstatě stejný, jenž odvodili Wess a Zumino v článku [56], a liší se pouze použitou notací.

# Kapitola 6

## Experimenty pro fitování rozpadu $\tau \rightarrow 3\pi\nu_\tau$

### 6.1 Experiment ARGUS

Experimentální skupina [40] studovala rozpady  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$  v detektoru ARGUS na urychlovači DORIS II ( $e^+e^-$ ) v DESY. Jejich korigovaná data (korekci na pozadí a akceptanci detektoru) poskytují 28 binů v energetickém rozsahu 0.425–1.775 GeV.

### 6.2 Experiment OPAL

Skupina OPAL publikovala své výsledky ve formě distribuce kvadrátu třípionové hmotnosti celkem ve dvou článcích. Oba články publikovala s daty rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$ . V této práci se budeme zabývat aktualizovanými daty z článku [42], kde jsou zahrnuty výsledky měření z let 1992–1994. Naměřená data se sestávají z 23 binů v energetickém rozsahu 0.65–2.75 GeV<sup>2</sup>.

### 6.3 Experiment CLEO

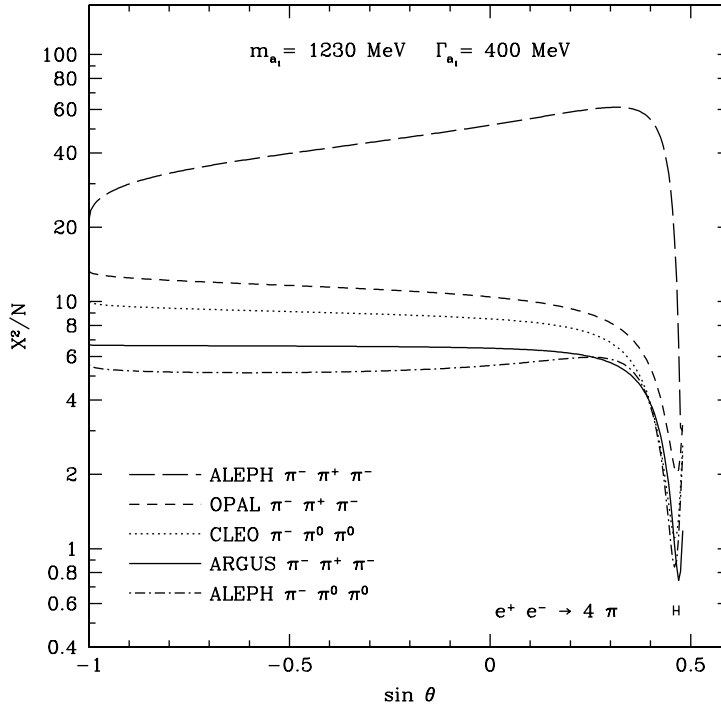
Rozpadem  $\tau$  leptonu na tři piony a neutrino se také zabývala skupina CLEO v CESRu (Cornell Electron Storage Ring). Ta poskytuje jak data rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$ , tak rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \pi^0 \nu_\tau$ . Jejich naměřená data rozpadu tau leptonu na tři nabitě piony a neutrino jsou bohužel stále předběžná [44], a tak je nebudeme pro náš účel fitování vůbec uvažovat. Naopak budeme využívat jejich naměřené hmotnostní distribuce třípionového systému  $\pi^- \pi^0 \pi^0$  uvedené v článku [43]. Třípionové hmotnostní spektrum korigované na pozadí a akceptanci detektoru obsahuje celkem 47 binů v energetickém rozsahu 0.5625–1.2375 GeV.

## 6.4 Experiment ALEPH

Skupina ALEPH v CERNu na urychlovači LEP publikovala článek sumarizující jeho výsledky týkající se větvičho poměru a spektrálních funkcí rozpadu  $\tau$  leptonu [50]. Tato data byla naměřena na detektoru ALEPH v letech 1991–1995, ale v roce 2005 byla znovu vyhodnocena vylepšenou metodou. Pro fitování budeme opět používat korigovaná data kvadrátu třípionového hmotnostního spektra  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$  a  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \pi^0 \nu_\tau$  rozpadu, které jsou rovněž přístupné na internetových stránkách [60]. Hmotnostní distribuce systému  $\pi^- \pi^+ \pi^-$  obsahuje 116 binů širokých  $0.025 \text{ GeV}^2$  s počátkem v  $0.225 \text{ GeV}^2$ .

## 6.5 Fitování experimentů ARGUS, OPAL, CLEO, ALEPH

Pro vyšetření závislosti mixovacího parametru  $\sin \theta$  v lagrangiánu  $a_1 \rho \pi$  vrcholu, jsme nejprve zafixovali ostatní parametry standardními hodnotami používanými PDG ( $m_{a_1} = 1.23 \text{ GeV}$ ,  $\Gamma_{a_1} = 0.4 \text{ GeV}$ ). Následně jsme vypočítali poměr  $\chi^2$  k počtu experimentálních bodů  $N$  pro každý experiment zvlášť. Výsledky těchto



Obrázek 6.1: Závislost  $\chi^2$  děleného počtem experimentálních bodů na mixovacím parametru  $\sin \vartheta$ . Interval parametru  $\sin \vartheta$ , jenž byl získán z elektron–pozitronové anihilace na čtyři piony [57, 58], je zobrazen jako úsečka v pravém dolním rohu.

Data	ALEPH [45]	ALEPH [45]	Všechny
	$\pi^-\pi^+\pi^-$	$\pi^-\pi^0\pi^0$	exp.
$\chi^2/\text{NDF}$	119.1/111	51.5/111	357.7/321
C.L. (%)	28.25	100.00	7.74
$m_{a_1}$ (MeV)	$1220 \pm 20$	$1256 \pm 10$	$1232 \pm 25$
$\Gamma_{a_1}$ (MeV)	$418 \pm 40$	$443 \pm 15$	$431 \pm 25$
$\sin \theta$	$0.460 \pm 0.004$	$0.466 \pm 0.004$	$0.463 \pm 0.005$
$y$ (GeV <sup>2</sup> )	$0.094 \pm 0.010$	$0.111 \pm 0.022$	$0.099 \pm 0.009$
$z$	$0.31 \pm 0.03$	$0.12 \pm 0.16$	$0.30 \pm 0.05$
$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$		$\sin \vartheta = 0.460 \pm 0.003$ [57]	
$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ & $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$		$\sin \vartheta = 0.466 \pm 0.005$ [58]	

Tabulka 6.1: Výsledky fitování experimentálních dat, ve kterých jsme neuvažovali příspěvek  $a_1(1640)$  v intermediálním stavu. Všechny exp.  $\equiv$  ARGUS [40] + OPAL [42] + CLEO [43] + ALEPH [45]. Pro porovnání uvádíme hodnotu mixovacího parametru z výsledků fitování anihilace  $e^+e^-$  vedoucí na čtyři piony.

výpočtů jsou na obrázku 6.1. Na stejném obrázku jasně pozorujeme, že pro všechny námi uvažované experimenty se minimum  $\chi^2/N$  soustřeďuje do relativně úzkého intervalu mixovacího parametru  $\sin \vartheta$ . Tento interval leží v regionu mixovacího úhlu, jenž byl nedávno spočítán v článku [57]. Výsledky plynoucí z našeho modelu rozpadu  $\tau^-$  leptonu jsou tedy podporovány výsledky anihilačního modelu  $e^+e^- \rightarrow 4\pi$ .

Jako další krok jsme optimalizovali parametry  $m_{a_1}, \Gamma_{a_1}, \sin \vartheta$  a  $z$  s využitím optimalizačního programu MINUIT Jamese a Roose [52]. Výsledky této minimalizace jsou uvedeny v tabulce 6.1. Jak vidíme v tabulce 6.1, souhlas našeho modelu s daty ALEPH  $\pi^-\pi^0\pi^0$  je perfektní (CL=100%). Hodnoty hmotnosti rezonance  $a_1$  ze všech třech fitovaných skupin jsou navzájem kompatibilní, stejně jako nominální šířka rezonance  $a_1$ .

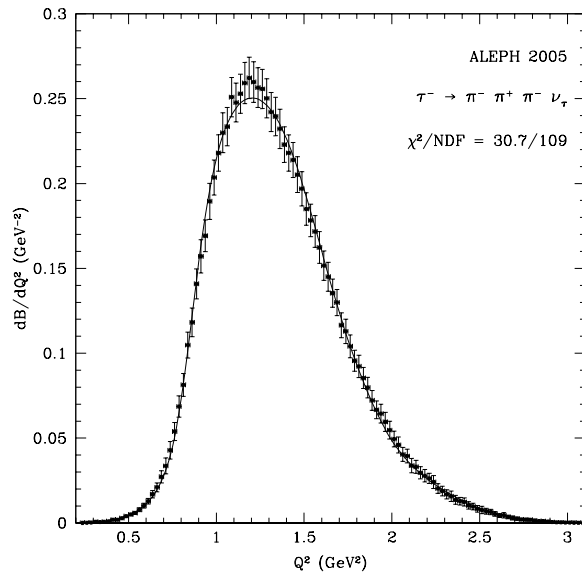
V dalším kroku jsme přidali do propagátoru rezonance  $a_1$  (4.0.1) příspěvek od rezonance  $a'_1$  (4.0.8). Tato procedura příliš nezvětšila počet volných parametrů, neboť jsme fixovali nominální hmotnost a šířku  $a'_1$  z dat poskytující PDG 2008 ( $m_{a'_1} = 1647$  MeV,  $\Gamma_{a'_1} = 254$  MeV). Výsledek minimalizační procedury je potom uveden v tabulce 6.2. Při porovnání tabulek 6.1 a 6.2 ihned vidíme, že došlo ve všech případech k pozvednutí kvality fitu. Pro ALEPH [45]  $\pi^-\pi^+\pi^-$  data došlo k poklesu  $\chi^2$  z 119.1 na 30.7 a korespondující úroveň spolehlivosti (CL) vystoupila na 100% z původních 28.25%. Vylepšení kvality fitu je ovšem nejlépe vidět v případě simultánního fitu všech experimentů (poslední sloupec tabulky 6.2).

Data	ALEPH [45] $\pi^-\pi^+\pi^-$	ALEPH [45] $\pi^-\pi^0\pi^0$	Všechny exp.
$\chi^2/\text{NDF}$	30.7/109	12.3/109	219.5/318
C.L. (%)	100	100	100
$m_{a_1}$ (MeV)	$1218 \pm 19$	$1255 \pm 18$	$1233 \pm 18$
$\Gamma_{a_1}$ (MeV)	$418 \pm 30$	$455 \pm 15$	$431 \pm 20$
$\sin \theta$	0.457(4)	0.457(6)	0.459(4)
$y$ (GeV <sup>2</sup> )	$0.106 \pm 0.019$	$0.148 \pm 0.025$	$0.114 \pm 0.014$
$z$	$0.34 \pm 0.03$	$0.36 \pm 0.14$	$0.34 \pm 0.05$
Re[ $\alpha$ ]	$-0.30 \pm 0.10$	$-0.34 \pm 0.13$	$-0.31 \pm 0.10$
Im[ $\alpha$ ]	$0.31 \pm 0.06$	$0.29 \pm 0.10$	$0.32 \pm 0.09$

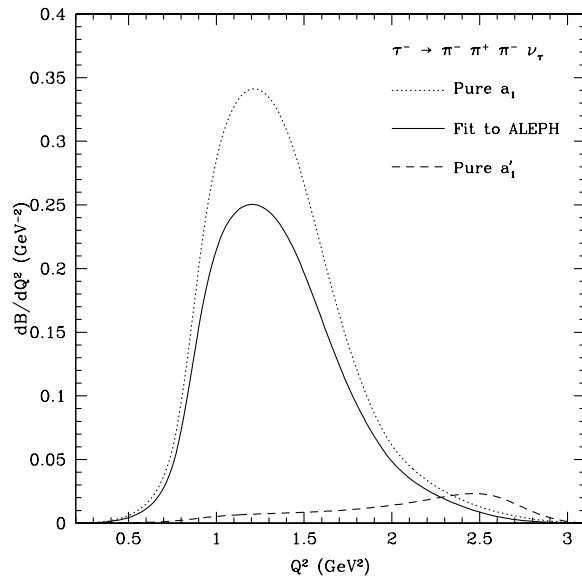
Tabulka 6.2: Výsledky fitování experimentálních dat. Ve výsledcích jsou zahrnuty příspěvky rezonancí  $a_1(1260)$  a  $a_1(1640)$ .

V tomto případě došlo k nárůstu úrovně spolehlivosti modelu z 7.7% na 100%. Jak můžeme vidět, hmotnost i šířka, stejně jako ostatní parametry našeho modelu, zůstávají velmi stabilní i po přidání příspěvku od rezonance  $a'_1$ .

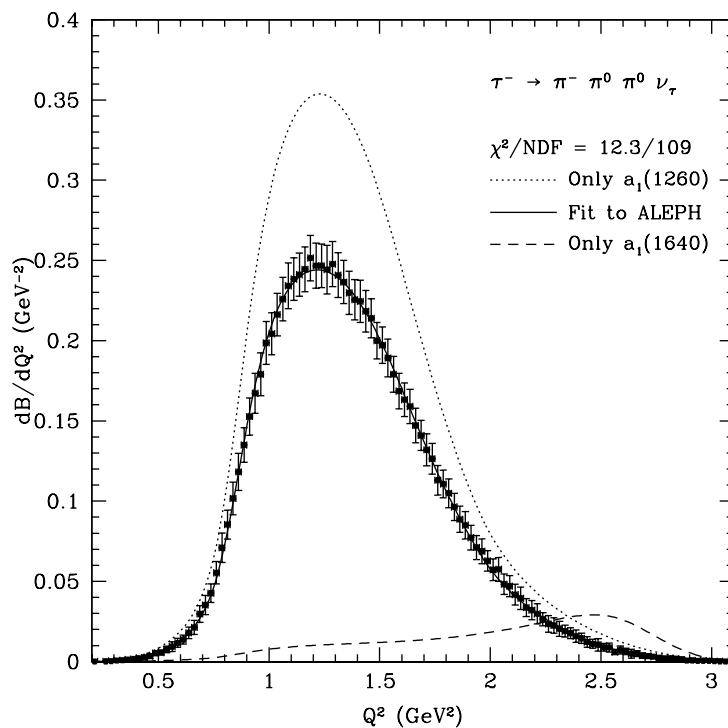
Porovnání dat  $\pi^-\pi^+\pi^-$  ALEPH [45] s vypočtenou hmotnostní distribucí našeho modelu je na obrázku 6.2. Jak jsme v předchozím viděli, zahrnutí příspěvku rezonance  $a'_1$  významně zlepšil souhlas našeho modelu s daty. Proto je trochu překvapivé, že na obrázku 6.2 nenacházíme žádnou viditelnou stopu po této rezonanci. Abychom tento efekt prozkoumali blíže, vypočetli jsme hmotnostní distribuci pro tyto tři případy: (1) v propagátoru  $a_1$  uvažujeme příspěvek rezonance  $a'_1$  (tato křivka je na obrázku 6.2); (2) uvažujeme pouze propagátor  $a_1$ ; (3) uvažujeme pouze propagátor  $a'_1$ . Pro všechny tři výpočty budeme uvažovat stejné hodnoty parametrů z prvního sloupce tabulky 6.2. Výsledné funkční závislosti můžeme potom vidět na obrázku 6.3. Jak z tohoto obrázku vidíme, finální hmotnostní distribuce třípionového systému je výsledkem destruktivní interference mezi dominantní amplitudou obsahující  $a_1$  propagátor a amplitudou obsahující propagátor  $a'_1$ . Stejný postup můžeme uplatnit i na rozpad  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\pi^0\nu_\tau$ , jehož hmotnostní distribuce je na obrázku 6.4. I na tomto obrázku je patrná destruktivní interference mezi oběma propagátory.



Obrázek 6.2: Porovnání třípionové hmotnostní distribuce, ve které jsou zahrnuty příspěvky od rezonancí  $a_1(1260)$  a  $a_1(1640)$ , s ALEPH [45] daty rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$ . Parametry modelu jsou brány z tabulky 6.2.



Obrázek 6.3: Studium vlivu rezonance  $a_1(1640)$  ve fitování dat ALEPH rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$ . Plná křivka označuje výsledný fit (z obrázku 6.2), tečkovaná křivka označuje příspěvek od rezonance  $a_1(1260)$  a čárkovaná křivka označuje příspěvek od rezonance  $a_1(1640)$  v intermediálním stavu s fixními parametry modelu.



Obrázek 6.4: Studium vlivu rezonance  $a_1(1640)$  při fitování dat ALEPH [45] rozpadu  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \pi^0 \nu_\tau$ . Plná křivka označuje výsledný fit, tečkovaná křivka označuje příspěvek od rezonance  $a_1(1260)$  a čárkovaná křivka označuje příspěvek od rezonance  $a_1(1640)$  v intermediálním stavu s fixními parametry modelu.

# Kapitola 7

## Závěr

V první části jsme se věnovali modelování pionového form-faktoru a jeho fitování na data celkem tří experimentů. Aplikováním našeho modelu na experimentální data CMD-2 [32] a SND [48] jsme dostali podobný poměr  $\chi^2/NDF$  jako v případě Gounaris–Sakurai (GS) parametrizace, avšak tento poměr byl vždy pro náš model o něco nižší. Na základě  $\chi^2/NDF$  kritéria by měly být oba modely stejně spolehlivé při fitování elektromagnetického form-faktoru. V tabulkách 3.1 a 3.2 můžeme vidět, že hodnoty nominální hmotnosti a šířky mezonu  $\rho(770)$  se v některých případech podstatně liší. Oprávněnost použití našeho modelu demonstruje také obrázek 3.2, na kterém porovnáváme naši a GS parametrizaci s daty fázového posunu v P vlně v  $\pi\pi$  rozptylu. Jak je z obrázku patrné, náš running mass model fituje experimentální data fázového posunu lépe, než-li GS parametrizace, i přes malou chybu udávanou experimentátory.

Jak jsme viděli, fitování dat skupiny KLOE [49] je problematické, neboť dává téměř nulové hodnoty úrovně spolehlivosti modelu pro GS i naši parametrizaci. Situace se ale dramaticky změní, pokud připustíme, že v datech skupiny KLOE existuje systematický energetický posun, minimálně v  $\rho$ - $\omega$  oblasti. V případě, že nominální hmotnost rezonance  $\omega(782)$  snížíme vůči nominální hmotnosti udávané PDG [19] o  $\approx 2$  MeV, dojde k dramatickému poklesu  $\chi^2/NDF$  pro obě uvažované parametrizace. Zatímco pro GS model stále dostáváme nízkou hladinu spolehlivosti modelu ( $CL = 2 \times 10^{-17}\%$ ), kvalita našeho fitu vzroste na 99.62%. Bohužel tento hmotnostní posun v datech vyloučila skupina KLOE v naší vzájemné korepondenci. Kvality obou fitů se dále zlepší, zahrneme-li do obou modelů příspěvek od rezonance  $\phi(1020)$ , zejména pro GS parametrizaci ( $CL = 22.34\%$ ).

V současnosti však nejsme schopni jednoznačně odpovědět na otázku základních parametrů  $\rho$  rezonance nebo korektní parametrizace elektromagnetického pionového form-faktoru. Přirozeně by základními parametry měly být ty, jenž vyplývají z nejlepšího fitu, kterým je v našem případě fit KLOE. Tento fit je ovšem zahalen nejasnostmi okolo energetického posunu v  $\rho$ - $\omega$  oblasti. Hlavním účelem této části práce je varovat před slepým použitím parametrizace, která si zaslouhuje více pozornosti.

Hodnoty parametrů mezonu  $\rho(770)$ , jenž jsme dostali fitováním pionového form-faktoru dat KLOE s úrovní spolehlivosti  $CL = 99.88\%$ , jsou následující:  $m_\rho = (761.51 \pm 0.14) \text{ MeV}$  a  $\Gamma_\rho = (142.56 \pm 0.41) \text{ MeV}$ . Jak vidíme, námi získané hodnoty nominální hmotnosti a šířky  $\rho$  mezonu jsou nižší, než hodnoty v současnosti udávané tabulkami PDG [39].

V druhé části této práce jsme ukázali, jak je důležité zvolit správný tvar  $a_1\rho\pi$  lagrangiánu a parametry v něm vystupující pro získání dobrého fitu třípionové distribuce rozpadu  $\tau$  leptonu.

Jako inovační přístup můžeme označit proces fitování experimentů, kde jako vstupní data bereme pro optimalizační program hned několik sad naměřených dat, místo jednoho experimentu. Tento postup bychom chtěli aplikovat i na jiné procesy, než je třípionový rozpad  $\tau$  leptonu. Přírozeným kandidátem pro zahrnutí do simultánního fitování je model anihilace  $e^+e^-$  vedoucí na čtyři piony [57, 58], který je založen na stejném  $a_1\rho\pi$  lagrangiánu. Dalšími potenciálními kandidáty mohou být, mimo slabých a elektromagnetických reakcí, také rozpady či reakce hadronové např.  $\rho(1700) \rightarrow a_1\pi$ ,  $\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^-p$ .

Od tohoto postupu si slibujeme zejména další možné zpřesnění nominální hmotnosti a šířky rezonance  $a_1(1260)$ . Zároveň se fitováním různých druhů reakcí celkově zvyšuje důvěra v takovýto  $a_1\rho\pi$  lagrangián.

Jak jsme uvedli v kapitole 6, dostali jsme pro náš model hodnotu spolehlivosti modelu  $CL = 100\%$  pro každou ze tří sad fitovaných dat. Námi získaná optimální hodnota mixovacího parametru  $\sin\vartheta$  v  $a_1\rho\pi$  lagrangiánu je kompatibilní s hodnotou získanou fitováním procesu anihilace elektronu a pozitronu na čtyři piony. Společný fit všech pěti experimentů potom dává následující parametry:  $m_{a_1} = (1233 \pm 18) \text{ MeV}$ ,  $\Gamma_{a_1} = (431 \pm 20) \text{ MeV}$  a  $\sin\vartheta = (0.459 \pm 0.004)$ .

Naše teoretické potvrzení existence rezonance  $a_1(1640)$  s nominální hmotností a šířkou, udávanou v PDG 2008 [39], je založeno na významném zvětšení úrovně spolehlivosti modelu z 7.7% na 100% po přidání příspěvku od této rezonance. Rovněž jsme v textu podali vysvětlení, proč není rezonance  $a'_1$  viditelná v třípionovém spektru.

# Literatura

- [1] H. W. Barz, G. Bertsch, B. L. Frieman, H. Schulz, S. Boggs, *Phys. Lett. B* **265**, 219 (1991)
- [2] V. L. Eletzky, B. L. Ioffe, J. I. Kapusta, *Eur. Phys. J. A* **3**, 381 (1998)
- [3] R. Rapp, J. Wambach, *Adv. Nucl. Phys.* **25**, 1 (2000)
- [4] G. E. Brown, M. Rho, *Phys. Rep.* **363**, 85 (2002)
- [5] O. Teodorescu, A. K Dutt-Mazumder, C. Gale, *Phys. Rev. C* **66**, 015209 (2002)
- [6] P. F. Kolb, M. Prakash, *Phys. Rev. C* **67**, 044902 (2003)
- [7] S. Pratt, W. Bauer, *Phys. Rev. C* **68**, 064905 (2003)
- [8] E. V. Shuryak and G. E. Brown, *Nucl. Phys.* **A717**, 322 (2003)
- [9] R. Rapp, *Nucl. Phys.* **A725**, 254 (2003)
- [10] G. E. Brown, M. Rho, *Phys. Rept.* **396**, 1 (2004)
- [11] J. Ruppert, T. Renk, B. Müller, *Phys. Rev. C* **73**, 034907 (2006)
- [12] K. Hikasa et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **45**, S1-S574 (1992)
- [13] L. Montanet et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **50**, 1173-1826 (1994)
- [14] R. M. Barnett et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **54**, 1 (1996)
- [15] C. Caso et al. (Particle Data Group), *The European Physical Journal C* **3**, 1 (1998)
- [16] D.E. Groom et al. (Particle Data Group), *The European Physical Journal C* **15**, 1 (2000)
- [17] K. Hagiwara et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **66**, 010001 (2002)
- [18] S. Eidelman et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **592**, 1 (2004)

- [19] W. M. Yao et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* **33**, 1 (2006)
- [20] M. F. Heyn, C. B. Lang, *Z. Phys. C* **7**, 169 (1981)
- [21] B. V. Geshkenbein, M. V. Terentev, *Yad. Fiz.* **40**, 758 (1984) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **40**, 487 (1984)]
- [22] B. V. Geshkenbein, *Z. Phys. C* **45**, 351 (1989)
- [23] S. Dubnička, L. Martinovič, *J. Phys. G* **15**, 1349 (1989)
- [24] A. Bernicha, G. López Castro, J. Pestieau, *Phys. Rev. D* **50**, 4454 (1994)
- [25] H. B. O'Connell, A. W. Thomas, A. G. Williams, *Nucl. Phys.* **A623**, 559 (1997)
- [26] S. Gardner, H. B. O'Connell, *Phys. Rev. D* **57**, 2716 (1998); Erratum *ibid.* **62**, 019903 (2000)
- [27] M. Benayoun, S. Eidelman, K. Maltman, H. B. O'Connell, B. Shwartz, A. G. Williams, *Eur. Phys. J. C* **2**, 269 (1998)
- [28] M. Benayoun, H. B. O'Connell, A. G. Williams, *Phys. Rev. D* **59**, 074020 (1999)
- [29] S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Antušek, *Acta Phys. Slovaca* **49**, 165 (1999)
- [30] D. Melikhov, O. Nachtmann, V. Nikonov, T. Paulus, *Eur. Phys. J. C* **34**, 345 (2004)
- [31] R. R. Akhmetshin et al., *Phys. Lett. B* **527**, 161 (2002)
- [32] R. R. Akhmetshin et al., *Phys. Lett. B* **578**, 285 (2004)
- [33] P. Lichard, *Phys. Rev. D* **60**, 053007 (1999)
- [34] C. Bricman et al. (Particle Data Group), *Rev. Mod. Phys.* **52**, S1-S286 (1980)
- [35] M. Roos et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **111**, 1-294 (1982)
- [36] M. Aguilar-Benítez et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **170**, 1-350 (1986)
- [37] G. P. Yost et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **204**, 1-486 (1988)
- [38] J. J. Hernández et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **239**, 1-516 (1990)
- [39] C. Amsler et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **667**, 1 (2008)

- [40] H. Albrecht et al. (ARGUS Collaboration), *Z. Phys. C - Particles and Fields* **58**, 61 (1993)
- [41] R. Akers et al., *Z. Phys. C - Particles and Fields* **67**,45 (1995)
- [42] K. Ackerstaff et al. (OPAL Collaboration), *Z. Phys. C - Particles and Fields* **75**, 593 (1997)
- [43] D. M. Asner et al. (CLEO Collaboration), *Phys. Rev. D* **61**, 012002 (1999)
- [44] E. I. Shibata (representing the CLEO Collaboration), *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **123**, 40 (2003); J. E. Duboscq (for the CLEO Collaboration), *Nucl. Phys. B* **144**, 40 (2005)
- [45] S. Schael et al. (ALEPH Collaboration), *Physics Reports* **421**, 191 (2005)
- [46] J. Pernegr et al., *Nucl. Phys. B* **134**, 436 (1978)
- [47] R. Kokoski, N. Isgur, *Phys. Rev. D* **35**, 907 (1987)
- [48] M. N. Achasov et al., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **130**, 437 (2006) [*J. Exp. Theor. Phys.* **103**, 380 (2006)]
- [49] A. Aloisio et al., *Phys. Lett. B* **606**, 12 (2005)
- [50] S. Schael et al. (ALEPH Collaboration), *Physics Report* **421**, 191 (2005)
- [51] G. J. Gounaris, J. J. Sakurai, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 244 (1968)
- [52] F. James, M. Roos, *Comput. Phys. Commun.* **10**, 343 (1975)
- [53] S. R. Amendolia et al., *Nucl. Phys.* **B277**, 168 (1986)
- [54] M. N. Achasov et al., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **128**, 1201 (2005) [*J. Exp. Theor. Phys.* **101**, 1053 (2005)]
- [55] Min-Shih Chen, P. M. Zerwas, *Phys. Rev. D* **11**, 58 (1975); H. Czyż, *hep-ph/0606227*.
- [56] J. Wess, B. Zumino, *Phys. Rev.* **163**, 1727 (1967)
- [57] P. Lichard, J. Juráň, *Phys. Rev. D* **76**, 094030 (2007)
- [58] J. Juráň, P. Lichard, *Phys. Rev. D* **78**, 017501 (2008)
- [59] P. Lichard, M. Vojík, *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **198**, 212 (2010)
- [60] <http://aleph.web.lal.in2p3.fr/tau/specfun.html>

# Kapitola 8

## Publikace a prezentace na konferencích

### 8.1 Publikace v recenzovaných časopisech

1. P. Lichard, M. Vojík; Structure of the  $a_1\rho\pi$  vertex, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* **198**, 212–215 (2010)
2. M. Vojík, P. Lichard; Three-pion decays of the tau lepton, the  $a_1(1260)$  properties, and the  $a_1\rho\pi$  Lagrangian; Zasláno do časopisu *Physical Review D*

### 8.2 Prezentace na konferencích

1. M. Vojík, P. Lichard; The  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \nu_\tau$  decay and the  $a_1\rho\pi$ -Lagrangian; 16-th Conference of Czech and Slovak Physicists, Hradec Králové, Czech Republic (2008)
2. M. Vojík, P. Lichard; An analysis of some parameters of  $\rho(770)$  resonance from  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  data; 19-th National Nuclear Physics Summer School; Tallahassee, Florida, USA (2007)

### 8.3 Plakáty na konferencích

1. P. Lichard, M. Vojík; An alternative Parametrization of the pion form factor and the mass and width of  $\rho(770)$ ; Hard Probes 2006; Asilomar, California, USA (2006)

# Kapitola 9

## Prohlášení autora

Tímto prohlašuji, že můj osobní přínos ke společným pracím uvedených v příloze 8, spočívá především v nezávislém zhotovení numerických procedur a samostatném provedení výpočtů.

V Opavě 12. července 2010.

.....  
Mgr. Martin Vojík

